# Kolorowanie grafu jako gra

Remigiusz Modrzejewski

3 grudnia 2008

# Plan prezentacji

# Podstawowe pojęcia

- **Drzewo** jest to graf prosty nieskierowany *acykliczny* i *spójny*.
- **Las** jest to graf prosty nieskierowany *acykliczny*. Spójne składowe lasu są *drzewami*.
- **Legalne pokolorowanie krawędzi** to takie przyporządkowanie wszystkim krawędziom grafu kolorów, gdzie żadne dwie *sąsiednie* krawędzie nie są pokolorowane tym samym kolorem. Krawędzie są sąsiednie jeśli są *incydentne* do tego samego wierzchołka.
- **Indeks chromatyczny** $\chi$ grafu to minimalna liczba kolorów potrzebna, aby istniało dla niego *legalne pokolorowanie*.
- **Stopień wierzchołka** $\Delta$ to liczba krawędzi z tym wierzchołkiem *incydentnych* (mających w nim jeden swój koniec).

# Zasady gry

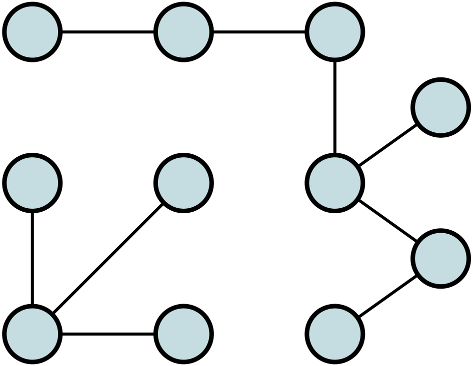
- Mamy **dwóch graczy** – Anię i Bartka.
- Gra rozgrywa się na pewnym grafie prostym, który początkowo nie jest pokolorowany.
- W ramach jednego ruchu gracz **legalnie koloruje jedną krawędź**.
- Gra się kończy, gdy nie ma możliwych ruchów.
- Ania wygrywa, gdy po skończeniu gry pokolorowane zostały wszystkie krawędzie. W przeciwnym wypadku wygrywa Bartek.
- *(Ze względu na równouprawnienie:)* Jako pierwszy ruch wykonuje Bartek. Potem gracze ruszają na przemian.

# Zasady gry

- Mamy **dwóch graczy** – Anię i Bartka.
- Gra rozgrywa się na pewnym grafie prostym, który początkowo nie jest pokolorowany.
- W ramach jednego ruchu gracz **legalnie koloruje jedną krawędź**.
- Gra się kończy, gdy nie ma możliwych ruchów.
- Ania wygrywa, gdy po skończeniu gry pokolorowane zostały wszystkie krawędzie. W przeciwnym wypadku wygrywa Bartek.
- *(Ze względu na równouprawnienie:)* Jako pierwszy ruch wykonuje Bartek. Potem gracze ruszają na przemian.
- Bartek w dowolnym momencie może zrezygnować z ruchu. Ania zawsze przy swojej kolejce musi pokolorować krawędź.

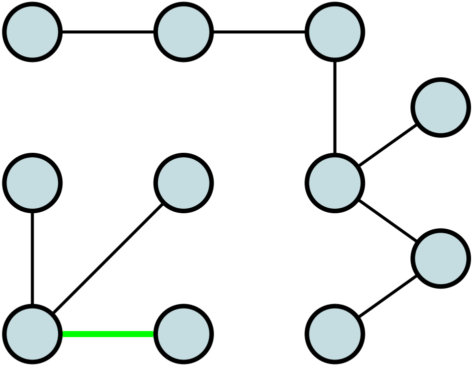
# Przykład rozgrywki – dostępne 3 kolory

Pomiń animację: 3



# Przykład rozgrywki – dostępne 3 kolory

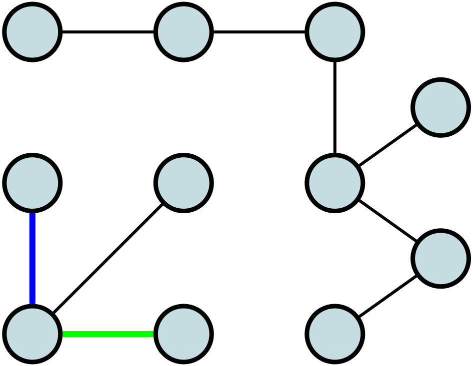
Pomiń animację: 3



Bartek

# Przykład rozgrywki – dostępne 3 kolory

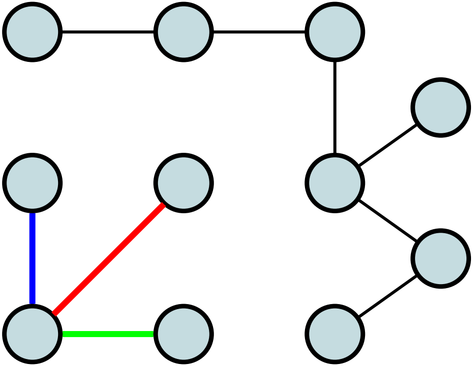
Pomiń animację: 3



Ania

# Przykład rozgrywki – dostępne 3 kolory

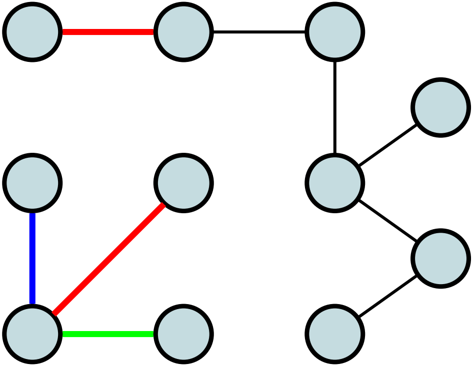
Pomiń animację: 3



Bartek

# Przykład rozgrywki – dostępne 3 kolory

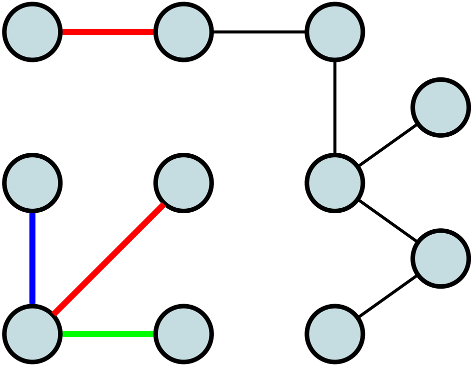
Pomiń animację: 3



Ania

# Przykład rozgrywki – dostępne 3 kolory

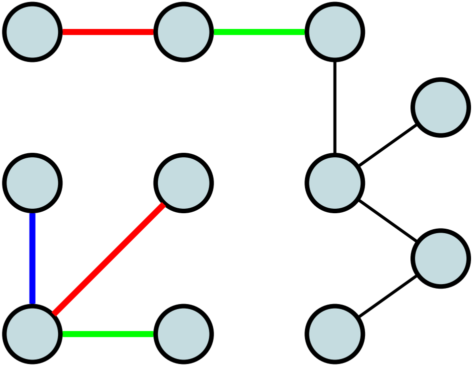
Pomiń animację: 3



Bartek
PASS

# Przykład rozgrywki – dostępne 3 kolory

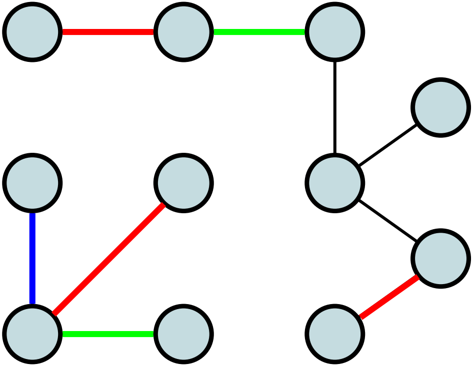
Pomiń animację: 3



Ania

# Przykład rozgrywki – dostępne 3 kolory

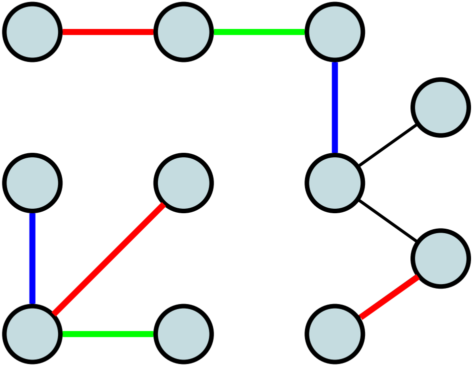
Pominń animację: 3



Bartek

# Przykład rozgrywki – dostępne 3 kolory

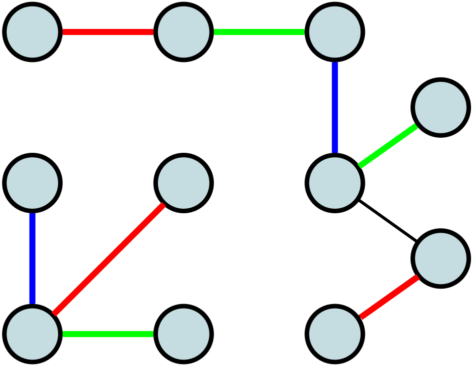
Pomiń animację: 3



Ania

# Przykład rozgrywki – dostępne 3 kolory

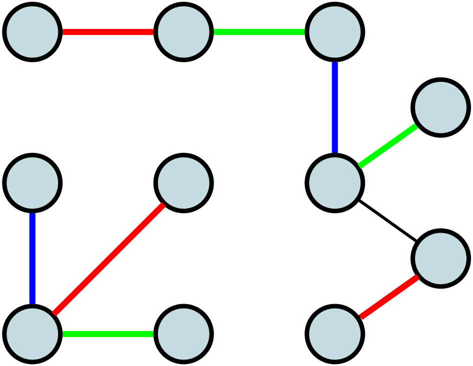
Pomiń animację: 3



Bartek

# Przykład rozgrywki – wynik

Nie można już legalnie pokolorować:



Wygrywa:
Bartek

# Wnioski z rozgrywki

Rozpatrywać będziemy **tylko lasy**. W dalszej części artykułu skupimy się jednak na takich o maksymalnym stopniu $\Delta = 5$. Z pokazanej rozgrywki można jednak wysnuć pewne ogólne wnioski:

- Nie miało by wpływu na wynik rozgrywki, gdybyśmy drzewo z lewego dolnego rogu pokolorowali na końcu – drzewa można rozpatrywać całkowicie niezależnie.
- W drzewie tym Bartek nie może doprowadzić do sytuacji, w której nie uda się go pokolorować – istnieją grafy, w których Ania zawsze wygra.

# Wnioski z rozgrywki

Rozpatrywać będziemy **tylko lasy**. W dalszej części artykułu skupimy się jednak na takich o maksymalnym stopniu $\Delta = 5$. Z pokazanej rozgrywki można jednak wysnuć pewne ogólne wnioski:

- Nie miało by wpływu na wynik rozgrywki, gdybyśmy drzewo z lewego dolnego rogu pokolorowali na końcu – drzewa można rozpatrywać całkowicie niezależnie.
- W drzewie tym Bartek nie może doprowadzić do sytuacji, w której nie uda się go pokolorować – istnieją grafy, w których Ania zawsze wygra.
- Gdyby Ania jako pierwszą pokolorowała krawędź, która została w rozgrywce niepokolorowana, a następnie którąś z pozostałych *incydentnych* z wierzchołkiem przy jej górnym końcu, to Bartek nie mógłby jej już przeszkodzić w pokolorowaniu reszty grafu – istnieją grafy, w których Ania ma *strategię wygrywającą*.

# Wnioski z wcześniejszych prac

- Dla każdego grafu $G$ i dostatecznie dużej liczby kolorów Ania ma strategię wygrywającą. Najmniejszą taką liczbę oznaczamy przez $\chi'_g(G)$ i nazywamy **indeksem chromatycznym gry** $g$ **na grafie** $G$ (ang. game chromatic index).
- Jak wykazali Cai i Zhu, dla grafów *k-zdegenerowanych* (definicja: 1) $\chi'_g(G) \leq \Delta + 3k - 1$. Oznacza to, że dla $n$-wierzchołkowych grafów pełnych $\chi'_g(G) \leq 4(n-1)$, zaś dla lasów $\chi'_g(G) \leq \Delta + 2$.
- Erdos *et al.* wykazali, że przy $\Delta \geq 2$ zachodzi $\chi'_g(G) \geq \Delta + 1$.

# Wnioski z wcześniejszych prac

- Dla każdego grafu $G$ i dostatecznie dużej liczby kolorów Ania ma strategię wygrywającą. Najmniejszą taką liczbę oznaczamy przez $\chi'_g(G)$ i nazywamy **indeksem chromatycznym gry** $g$ **na grafie** $G$ (ang. game chromatic index).
- Jak wykazali Cai i Zhu, dla grafów *k-zdegenerowanych* (definicja: 1) $\chi'_g(G) \leq \Delta + 3k - 1$. Oznacza to, że dla $n$-wierzchołkowych grafów pełnych $\chi'_g(G) \leq 4(n-1)$, zaś dla lasów $\chi'_g(G) \leq \Delta + 2$.
- Erdos *et al.* wykazali, że przy $\Delta \geq 2$ zachodzi $\chi'_g(G) \geq \Delta + 1$.

Dla lasów $\chi'_g(G) = \Delta + 1 \wedge \chi'_g(G) = \Delta + 2$.

# Plan prezentacji

# Strategia wygrywająca dla Anii w drzewach o $\Delta = 5$

Strategia wygrywająca mocno opiera się na pierwszym spostrzeżeniu z *wniosków z rozgrywki (1)*: traktujemy osobne drzewa jako niezależne pola walki. Jest ono jednak trochę wzmocnione – zawsze gdy kolorujemy środkową krawędź, dzielimy drzewo na dwa „tnąc w połowie tej krawędzi”. Powstają nam wtedy dwa nowe *poddrzewa niezależne*.

# Strategia wygrywająca dla Anii w drzewach o $\Delta = 5$

Strategia wygrywająca mocno opiera się na pierwszym spostrzeżeniu z *wniosków z rozgrywki (1)*: traktujemy osobne drzewa jako niezależne pola walki. Jest ono jednak trochę wzmocnione – zawsze gdy kolorujemy środkową krawędź, dzielimy drzewo na dwa „tnąc w połowie tej krawędzi". Powstają nam wtedy dwa nowe *poddrzewa niezależne*.

Definiuje się kilka klas *poddrzew niezależnych* nazywanych *typami dozwolonymi*. Mają one trzy ważne właściwości:

1. dzieląc kolejne *poddrzewa niezależne* zawsze na poddrzewa *typów dozwolonych* Ania osiągnie legalne pokolorawnie grafu
2. po każdym ruchu Bartka może powstać najwyżej jedno *poddrzewo niedozwolone*, które Ania może jednym ruchem naprawić *(zredukować do dozwolonego)*
3. z każdego typu dozwolonego możemy bezpośrednio redukować do typu dozwolonego

# Definicje

- **Poddrzewo niezależne T** w lesie F jest to takie poddrzewo ze swoim *częściowym pokolorowaniem*, że każda pokolorowana krawędź w T prowadzi do liścia oraz T jest maksymalne. Wniosek: jeśli A jest liściem w T i krawędź do niego prowadząca jest niepokolorowana, to A jest też liściem w F.
- Wierzchołek leżący na wszystkich ścieżkach między dwoma różnie pokolorowanymi krawędziami nazywamy **wierzchołkiem gwiazdowym**.
- *Poddrzewo niezależne* nazywamy $n$-**gwiazdą** gdy ma $n$ pokolorowanych krawędzi oraz, jeśli $n \geq 3$, zawiera *wierzchołek gwiazdowy*.
- Mówimy, że *$n$-gwiazda* jest **regularna** gdy $n \leq 2$ lub co najmniej jedna krawędź pokolorowana jest incydentna z *wierzchołkiem gwiazdowym*.

- Przez $v_0$-**gałąź B** rozumiemy poddrzewo T takie, że dokładnie jedna krawędź z B jest incydentna z $v_0$.
- Mówimy, że $v_0$-*gałąź B* jest pokolorowana, gdy zawiera co najmniej jedną pokoloraną gałąź, w przeciwnym wypadku jest niepokolorowana. Spostrzeżenie: $n$-gwiazda z wierzchołkiem gwiazdowym $v_0$ ma dokładnie $n$ pokolorowanych i najwyżej $\Delta - n$ niepokolorowanych $v_0$-gałęzi.
- W $n$-gwieździe o $n \geq 3$ o pokolorowanej krawędzi powiemy, że jest **niedopasowana**, jeśli nie ma krawędzi incydentnej do jej wierzchołka gwiazdowego o tym samym kolorze.
- O *niedopasowanej* krawędzi powiemy, że jest **silnie niedopasowana**, jeśli dodatkowo jej odległość od wierzchołka gwiazdowego jest równa jeden. To znaczy, jeśli między nią a wierzchołkiem gwiazdowym jest jedna niepokolorowana krawędź.

# Typy dozwolone

Pierwszym typem dozwolonym $S_n$ są $n$-gwiazdy, które dodatkowo spełniają warunki:

1. są *regularne*
2. jeśli wierzchołek gwiazdowy jest stopnia $\Delta$ i $n \geq 4$, to zawierają co najwyżej $\max(0, \Delta - 1 - n)$ silnie niedopasowanych krawędzi

Zwróćmy uwagę na fakt, że już całkowicie niepokolorowane drzewo spełnia ten warunek. Jest ono 0-gwiazdą, a więc i poddrzewem typu dozwolonego $S_0$.

# Typy dozwolone

Pierwszym typem dozwolonym $S_n$ są $n$-gwiazdy, które dodatkowo spełniają warunki:

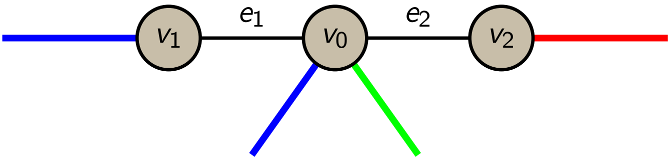
1. są *regularne*
2. jeśli wierzchołek gwiazdowy jest stopnia $\Delta$ i $n \geq 4$, to zawierają co najwyżej $\max(0, \Delta - 1 - n)$ silnie niedopasowanych krawędzi

Zwróćmy uwagę na fakt, że już całkowicie niepokolorowane drzewo spełnia ten warunek. Jest ono 0-gwiazdą, a więc i poddrzewem typu dozwolonego $S_0$.
Klasa ta nie jest wystarczająca. Ania nie może zapobiec stworzeniu 3-gwiazdy z dwoma silnie niedopasowanymi krawędziami. Musimy więc wprowadzić dodatkowy typ dozwolony (konketnie $P_1$ 2) do którego będzimy redukować po takim ruchu Bartka. To zaś wymusza cały łańcuch dodatkowych typów.

# Typ $P_1$

Wszystkie typy mogą mieć dodatkowe niepokolorowane $v_i$-gałęzie.

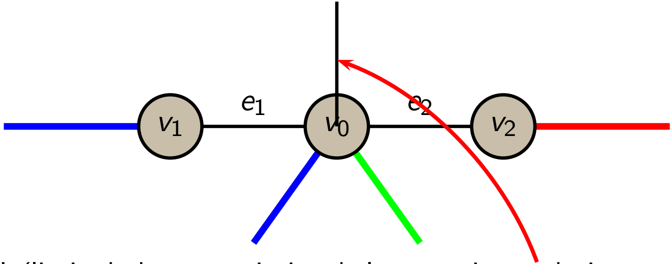
Do redukcji: 6



# Typ $P_1$

Wszystkie typy mogą mieć dodatkowe niepokolorowane $v_i$-gałęzie.

Do redukcji: 6

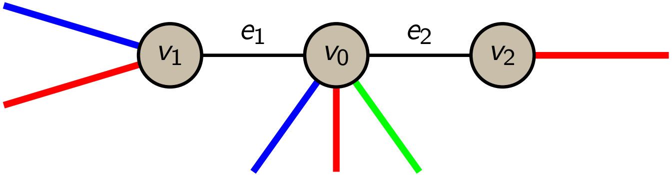



Jeśli nie dodamy tutaj niepokolorowanej $v_0$-gałęzi, to rysunek przedstawia przykład typu $S_4$. Po jej dodaniu okazuje się, że mamy 2 silnie niedopasowane krawędzie, a powinniśmy mieć $\Delta - 1 - n = 5 - 1 - 4 = 0$

# Typ $P_2$

Wszystkie typy mogą mieć dodatkowe niepokolorowane $v_i$-gałęzie.

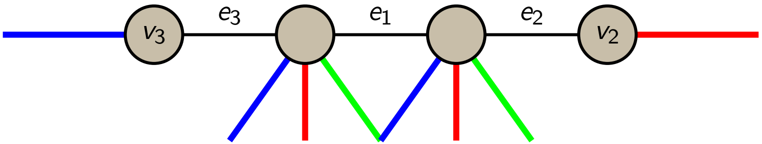
Do redukcji: 7



# Typ $P_3$

Wszystkie typy mogą mieć dodatkowe niepokolorowane $v_i$-gałęzie.

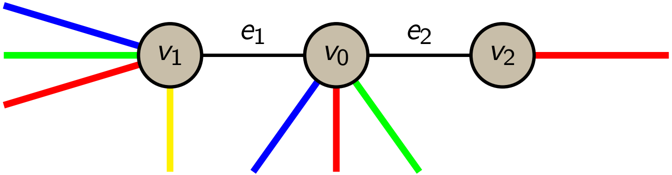
Do redukcji: 7



# Typ $P_4$

Wszystkie typy mogą mieć dodatkowe niepokolorowane $v_i$-gałęzie.

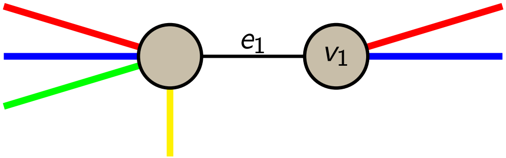
Do redukcji: 8



# Typ $P_A$

Wszystkie typy mogą mieć dodatkowe niepokolorowane $v_i$-gałęzie.

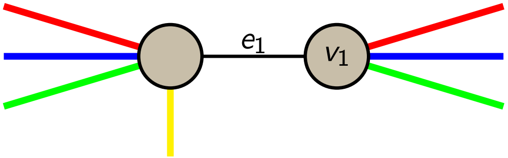
Do redukcji: 8



# Typ $P_B$

Wszystkie typy mogą mieć dodatkowe niepokolorowane $v_i$-gałęzie.

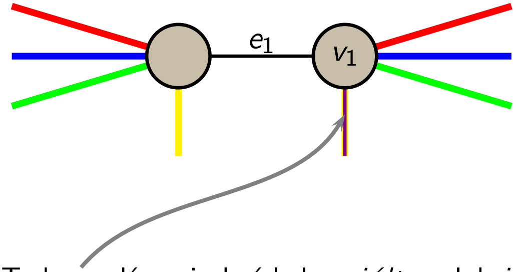
Do redukcji: 8



# Typ $P_C$

Wszystkie typy mogą mieć dodatkowe niepokolorowane $v_i$-gałęzie.

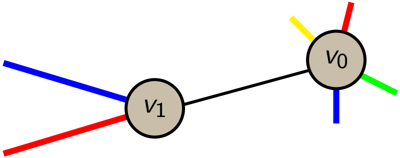
Do redukcji: 8




Ta krawędź może być koloru *żółtego* lub *innego*.

# Uwagi ogólne do redukcji

- Interesują nas głównie przypadki, gdy Bartek wytworzył nam podgraf niedozwolony.
- W trakcie zabawy może powstać nam *n*-**kometa** z wierzchołkiem gwiazdowym $v_0$ i wierzchołkiem ogonowym $v_1$. Nie należy się jej bać, nie gryzie.




Rysunek przedstawia pewną 6-kometę. W dowolnym miejscu można dodać dowolną liczbę niepokolorowanych krawędzi i wierzchołków.

# Redukcje z typów $S_n$

Jeśli w wyniku ruchu Bartka powstają dwa poddrzewa niezależne, to jedno z nich musi być typu $S_1$ albo $S_2$ – jest dozwolone. Oznaczmy nowo utworzone poddrzewo niedozwolone przez $T'$. Przypadek, gdy jest ono 3-gwiazdą jest trywialny (trzeba przywrócić regularność), więc załóżmy, że $T'$ zawiera co najmniej 4 pokolorowane krawędzie. Oznaczmy, że $v_0$ to wierzchołek gwiazdowy $T$.
Bartek mógł pokolorować krawędź w pokolorowanej $v_0$-gałęzi, ale nie leżącą na ścieżce między wcześniej pokolorowaną krawędzią a $v_0$. W takim razie powstaje $n+1$-*kometa z wierzchołkiem ogonowym* $v_1$. W przeciwnym wypadku mamy do czynienia z $n$-gwiazdą bądź $n+1$-gwiazdą.

**Przypadek 1:** $T'$ jest regularną $k$-gwiazdą, $\deg(v_0) = \Delta$.

Bartek mógł dodać jedną silnie niedopasowaną krawędź, więc możemy mieć o dwie takie krawędzie za dużo dla własności 2. W takim przypadku Ania koloruje krawędź między $v_0$ a jedną z nich na kolor drugiej z nich (jeśli była tylko jedna, to na dowolny legalny).

Wyjątkiem jest przypadek $\Delta = 5, k = 4$, gdy mogą być o 3 za dużo. Jeśli wszystkie 3 silnie niedopasowane krawędzie są różnych kolorów, to nie możemy zredukować do typu $S_n$. W takim razie usuwamy dowolne dwie z nich redukując do typu $S_1$.

**Przypadek 2:** $T'$ jest $n+1$-kometą.

Oznaczmy prez $e_0$ pierwszą, a przez $e_1$ ostatnią krawędź na ścieżce między $v_0$ a $v_1$.
Jeśli $e_0 = e_1$, to wystarczy go legalnie pokolorować, by powstały dwa poddrzewa typów $S_n$.
Jeśli $e_0 \neq e_1$, to Ania powinna pokolorować $e_0$ o ile nie doprowadzi to do powstania nieregularnej 3-gwiazdy (o ile jakaś pokolorowana krawędź jest incydentna z $v_1$). Jeśli to się jej nie uda, powinna pokolorować $e_1$ kolorem krawędzi incydentnej z $v_0$. W obu przypadkach otrzymamy poddrzewa typów $S_n$.

# Redukcje z typów $P_?$

W więszości typów $P_?$ występują dwie lub trzy nazwane krawędzie. Bartek może stworzyć poddrzewo niedozwolone wyłącznie kolorując jedną z nich. Ania podówczas naprawia sytuację kolorując inną nazwaną krawędź. Po takiej operacji powstają nam, z niepokolorowanych $v_n$-gałęzi (a więc pominiętych na rysunkach), poddrzewa typów $S_n$. Wobec tego dalej opisujemy wyłącznie przypadki, gdy Bartek pokolorował gałąź w niepokolorowanej $v_n$-gałęzi, od strony $v_0$ (bo z drugiej strony mamy nic lub $S_1$).

## Typ $P_1$ , ilustracja: 2

- Jeśli Bartek pokolorował krawędź w niepokolorowanej $v_2$-gałęzi, to Ania koloruje krawędź $e_2$.
- Jeśli Bartek pokolorował krawędź w niepokolorowanej $v_1$-gałęzi (próbujemy po kolei):
  1. Ania koloruje $e_1$ na czerwono.
  2. Ania koloruje pierwszą krawędź niewidocznej na ilustracji $v_0$-gałęzi na czerwono $\longrightarrow P_2$
- Jeśli Bartek pokolorował krawędź $e$ w niepokolorowanej $v_0$-gałęzi:
  1. Jeśli $e$ jest incydentne z $v_0$, Ania koloruje $e_2$.
  2. Ania koloruje krawędź incydentną z $v_0$ ze ścieżki między $e$ a $v_0$ na czerwono.
  3. Ania koloruje $e_1$ na czerwono.

**Typ** $P_2$ , ilustracja: 3

- Jeśli Bartek pokolorował krawędź w niepokolorowanej $v_2$-gałęzi, to ania koloruje $e_2 \longrightarrow P_A$
- Jeśli Bartek pokolorował krawędź $e$ w niepokolorowanej $v_1$-gałęzi na kolor $x$:
    1. Jeśli $\deg(v_1) = 5$, $e$ jest oddalone od $v_1$ o 1 i jest pokolorowane na zielono, to Ania koloruje na zielono pierwszą krawędź z pozostałej niepokolorowanej $v_1$-gałęzi $\longrightarrow P_3$
    2. Ania koloruje $e_1$ na $x$, jeśli się nie da to jakkolwiek.

**Typ** $P_3$ , ilustracja: 4

Jeśli Bartek pokolorował krawędź w niepokolorowanej $v_2$-gałęzi, to Ania powinna pokolorować $e_2$. Sytuacja jest symetryczna dla $v_3$-gałęzi $\longrightarrow P_4$

**Typ** $P_4$ , ilustracja: 5

Jeśli Bartek pokolorował krawędź w niepokolorowanej $v_2$-gałęzi, to Ania powinna pokolorować $e_2 \longrightarrow P_C$.

**Typ** $P_A$ , ilustracja: 6
**Typ** $P_B$ , ilustracja: 7
**Typ** $P_C$ , ilustracja: 8
Postępowanie dla każdego z tych trzech typów jest identyczne:

- Jeśli Bartek pokolorował krawędź incydentną z $v_1$, to Ania koloruje $e_1$.
- Jeśli Bartek pokolorował krawędź $e$ nie incydentną z $v_1$, to Ania koloruje krawędź incydentną z $v_1$ leżącą na drodze z $e$ do $v_1$. Przejdziemy tak kolejno $P_A \longrightarrow P_B \longrightarrow P_C \longrightarrow S_3$

# Plan prezentacji

# Przypadki dla lasów o innych maksymalnych stopniach

1. Dla $\Delta \geq 6$ wystarczy opisana strategia bez typów $P_?$.
2. Dla $\Delta = 2$ dowód, że $\chi'_g(G) \leq 3$ jest trywialny.
3. Dla $\Delta = 3$ Andres udowodnił, że $\chi'_g(G) \leq 4$, używając jednak zupełnie innej strategii.
4. Dla $\Delta = 4$ problem wciąż jest otwarty

Brakuje więc tylko jednego przypadku, by stwierdzić, czy prawdziwym jest twierdzenie:
*Dla każdego lasu $G$ o maksymalnym stopniu wierzchołka $\Delta$ zachodzi*

$$\chi'_g(G) \leq \Delta + 1$$

# Definicje

- **Graf k-zdegenerowany** to taki graf, którego każdy podgraf indukowany ma wierzchołek o stopniu co najwyżej $k$.
  Powrót: 2.
- $n$-**kometa** jest to układ powstający z $n-1$-*gwiazdy* o *wierzchołku gwiazdowym* $v_0$ poprzez pokolorowanie krawędzi $e$ w *pokolorowanej* $v_0$-*gałęzi* takiej, że przed pokolorowaniem nie leżała ona na ścieżce między pokolorowanymi krawędziami.

- Prezentacja oparta na pracy *The game chromatic index of forests of maximum degree* $\Delta \geq 5$, autor: Stephan Dominique Andres.
- Przypadek dla $\Delta = 3$ rozpatrzony przez tegoż samego autora w pracy *Spieltheoretische Kabtenfarbungsprobleme auf Waldern und verwandte Strukturen*.
- Twierdzenie o górnej granicy na $\chi'_g(G)$ dla grafów *k-zdegenerowanych* opisane jest w pracy *Game chromatic index of k-degenerate graphs*, autorzy: L.Cai i X.Zhu
- Twierdzenie o dolnej granicy na $\chi'_g(G)$ dla lasów opisane jest w *Note on the game chromatic index of trees*, autorzy: P.Erdos, U. Faigle, W.Hochstattler.

Opracował: Remigiusz 'IRem' Modrzejewski

Prezentacja przygotowana w ramach przedmiotu *Algorytmy grafowe* na Katedrze Algorytmów i Modelowania Systemów (http://kaims.pl). Strona przedmiotu: http://kaims.pl/~deren/ag/

Prezentacja dostępna pod adresem: http://Irem.net/pages/view/algorithms

Prezentacja, wraz z wszystkimi ilustracjami, wykonana w całości za pomocą systemu LaTeX.