Kolorowanie grafu jako gra

Remigiusz Modrzejewski

3 grudnia 2008

Plan prezentacji

Podstawowe pojęcia

- **Drzewo** jest to graf prosty nieskierowany *acykliczny* i *spójny*.
- **Las** jest to graf prosty nieskierowany *acykliczny*. Spójne składowe lasu są *drzewami*.
- **Legalne pokolorowanie krawędzi** to takie przyporządkowanie wszystkim krawędziom grafu kolorów, gdzie żadne dwie *sąsiednie* krawędzie nie są pokolorowane tym samym kolorem. Krawędzie są sąsiednie jeśli są *incydentne* do tego samego wierzchołka.
- **Indeks chromatyczny** χ grafu to minimalna liczba kolorów potrzebna, aby istniało dla niego *legalne pokolorowanie*.
- **Stopień wierzchołka** Δ to liczba krawędzi z tym wierzchołkiem *incydentnych* (mających w nim jeden swój koniec).

Zasady gry

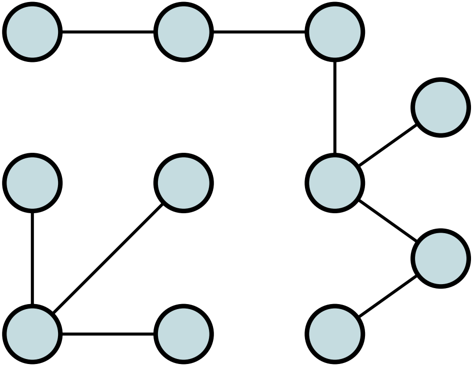
- Mamy **dwóch graczy** – Anię i Bartka.
- Gra rozgrywa się na pewnym grafie prostym, który początkowo nie jest pokolorowany.
- W ramach jednego ruchu gracz **legalnie koloruje jedną krawędź**.
- Gra się kończy, gdy nie ma możliwych ruchów.
- Ania wygrywa, gdy po skończeniu gry pokolorowane zostały wszystkie krawędzie. W przeciwnym wypadku wygrywa Bartek.
- *(Ze względu na równouprawnienie:)* Jako pierwszy ruch wykonuje Bartek. Potem gracze ruszają na przemian.

Zasady gry

- Mamy **dwóch graczy** – Anię i Bartka.
- Gra rozgrywa się na pewnym grafie prostym, który początkowo nie jest pokolorowany.
- W ramach jednego ruchu gracz **legalnie koloruje jedną krawędź**.
- Gra się kończy, gdy nie ma możliwych ruchów.
- Ania wygrywa, gdy po skończeniu gry pokolorowane zostały wszystkie krawędzie. W przeciwnym wypadku wygrywa Bartek.
- *(Ze względu na równouprawnienie:)* Jako pierwszy ruch wykonuje Bartek. Potem gracze ruszają na przemian.
- Bartek w dowolnym momencie może zrezygnować z ruchu. Ania zawsze przy swojej kolejce musi pokolorować krawędź.

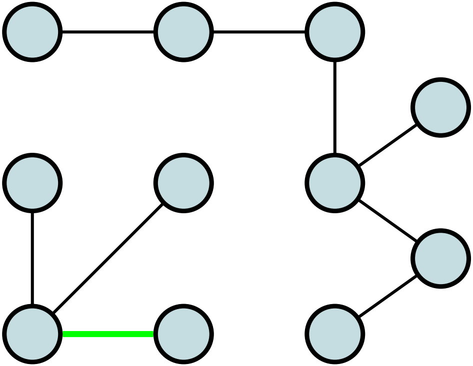
Przykład rozgrywki – dostępne 3 kolory

Pomiń animację: 3



Przykład rozgrywki – dostępne 3 kolory

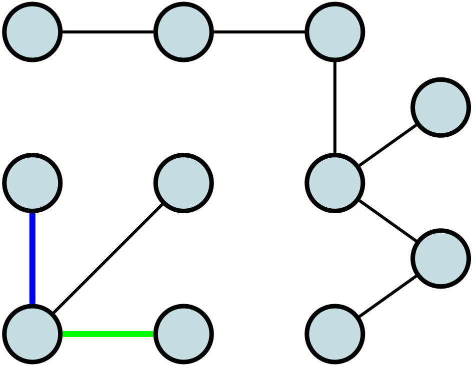
Pomiń animację: 3



Bartek

Przykład rozgrywki – dostępne 3 kolory

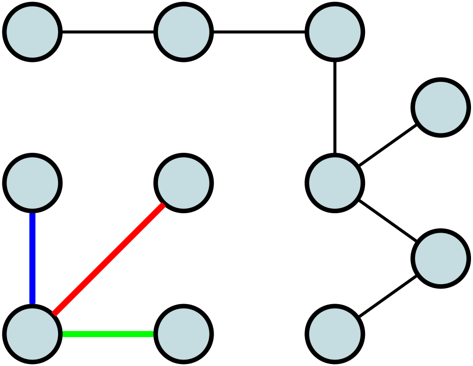
Pomiń animację: 3



Ania

Przykład rozgrywki – dostępne 3 kolory

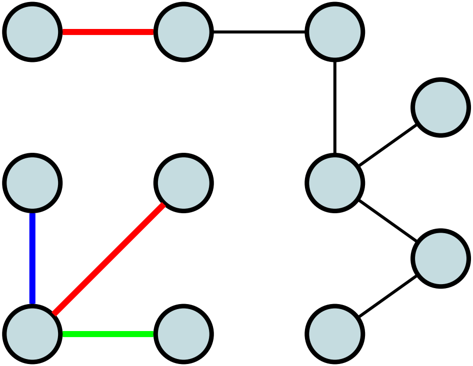
Pomiń animację: 3



Bartek

Przykład rozgrywki – dostępne 3 kolory

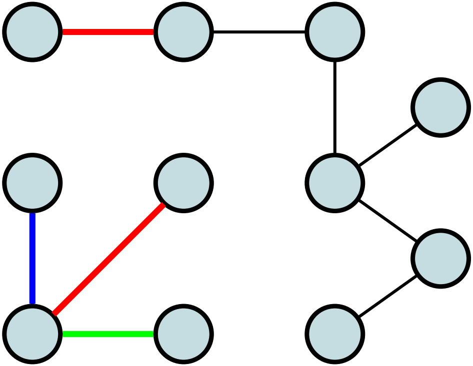
Pomiń animację: 3



Ania

Przykład rozgrywki – dostępne 3 kolory

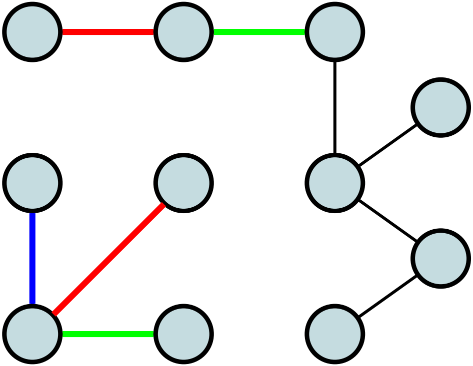
Pomiń animację: 3



Bartek
PASS

Przykład rozgrywki – dostępne 3 kolory

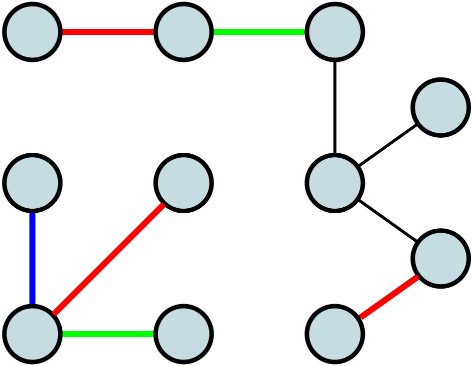
Pomiń animację: 3



Ania

Przykład rozgrywki – dostępne 3 kolory

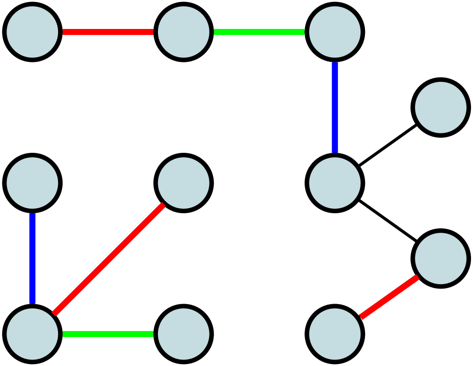
Pomiń animację: 3



Bartek

Przykład rozgrywki – dostępne 3 kolory

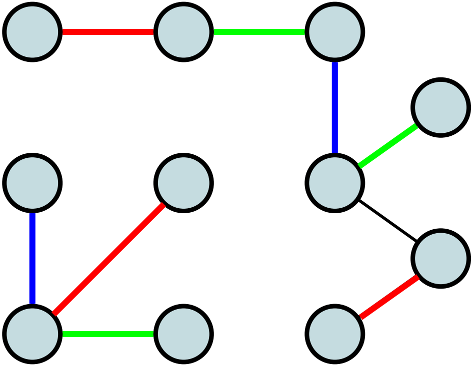
Pomiń animację: 3



Ania

Przykład rozgrywki – dostępne 3 kolory

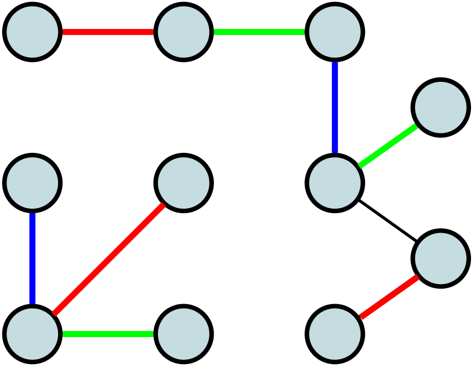
Pomiń animację: 3



Bartek

Przykład rozgrywki – wynik

Nie można już legalnie pokolorować:



Wygrywa:
Bartek

Wnioski z rozgrywki

Rozpatrywać będziemy **tylko lasy**. W dalszej części artykułu skupimy się jednak na takich o maksymalnym stopniu $\Delta = 5$. Z pokazanej rozgrywki można jednak wysnuć pewne ogólne wnioski:

- Nie miało by wpływu na wynik rozgrywki, gdybyśmy drzewo z lewego dolnego rogu pokolorowali na końcu – drzewa można rozpatrywać całkowicie niezależnie.
- W drzewie tym Bartek nie może doprowadzić do sytuacji, w której nie uda się go pokolorować – istnieją grafy, w których Ania zawsze wygra.

Wnioski z rozgrywki

Rozpatrywać będziemy **tylko lasy**. W dalszej części artykułu skupimy się jednak na takich o maksymalnym stopniu $\Delta = 5$. Z pokazanej rozgrywki można jednak wysnuć pewne ogólne wnioski:

- Nie miało by wpływu na wynik rozgrywki, gdybyśmy drzewo z lewego dolnego rogu pokolorowali na końcu – drzewa można rozpatrywać całkowicie niezależnie.
- W drzewie tym Bartek nie może doprowadzić do sytuacji, w której nie uda się go pokolorować – istnieją grafy, w których Ania zawsze wygra.
- Gdyby Ania jako pierwszą pokolorowała krawędź, która została w rozgrywce niepokolorowana, a następnie którąś z pozostałych *incydentnych* z wierzchołkiem przy jej górnym końcu, to Bartek nie mógłby jej już przeszkodzić w pokolorowaniu reszty grafu – istnieją grafy, w których Ania ma *strategię wygrywającą*.

Wnioski z wcześniejszych prac

- Dla każdego grafu G i dostatecznie dużej liczby kolorów Ania ma strategię wygrywającą. Najmniejszą taką liczbę oznaczamy przez $\chi'_g(G)$ i nazywamy **indeksem chromatycznym gry** g **na grafie** G (ang. game chromatic index).
- Jak wykazali Cai i Zhu, dla grafów *k-zdegenerowanych* (definicja: 1) $\chi'_g(G) \leq \Delta + 3k - 1$. Oznacza to, że dla n-wierzchołkowych grafów pełnych $\chi'_g(G) \leq 4(n-1)$, zaś dla lasów $\chi'_g(G) \leq \Delta + 2$.
- Erdos *et al.* wykazali, że przy $\Delta \geq 2$ zachodzi $\chi'_g(G) \geq \Delta + 1$.

Wnioski z wcześniejszych prac

- Dla każdego grafu G i dostatecznie dużej liczby kolorów Ania ma strategię wygrywającą. Najmniejszą taką liczbę oznaczamy przez $\chi'_g(G)$ i nazywamy **indeksem chromatycznym gry** g **na grafie** G (ang. game chromatic index).
- Jak wykazali Cai i Zhu, dla grafów *k-zdegenerowanych* (definicja: 1) $\chi'_g(G) \leq \Delta + 3k - 1$. Oznacza to, że dla n-wierzchołkowych grafów pełnych $\chi'_g(G) \leq 4(n-1)$, zaś dla lasów $\chi'_g(G) \leq \Delta + 2$.
- Erdos *et al.* wykazali, że przy $\Delta \geq 2$ zachodzi $\chi'_g(G) \geq \Delta + 1$.

Dla lasów $\chi'_g(G) = \Delta + 1 \wedge \chi'_g(G) = \Delta + 2$.

Plan prezentacji

Strategia wygrywająca dla Anii w drzewach o $\Delta = 5$

Strategia wygrywająca mocno opiera się na pierwszym spostrzeżeniu z *wniosków z rozgrywki (1)*: traktujemy osobne drzewa jako niezależne pola walki. Jest ono jednak trochę wzmocnione – zawsze gdy kolorujemy środkową krawędź, dzielimy drzewo na dwa „tnąc w połowie tej krawędzi”. Powstają nam wtedy dwa nowe *poddrzewa niezależne*.

Strategia wygrywająca dla Anii w drzewach o $\Delta = 5$

Strategia wygrywająca mocno opiera się na pierwszym spostrzeżeniu z *wniosków z rozgrywki (1)*: traktujemy osobne drzewa jako niezależne pola walki. Jest ono jednak trochę wzmocnione – zawsze gdy kolorujemy środkową krawędź, dzielimy drzewo na dwa „tnąc w połowie tej krawędzi". Powstają nam wtedy dwa nowe *poddrzewa niezależne*.

Definiuje się kilka klas *poddrzew niezależnych* nazywanych *typami dozwolonymi*. Mają one trzy ważne właściwości:

1. dzieląc kolejne *poddrzewa niezależne* zawsze na poddrzewa *typów dozwolonych* Ania osiągnie legalne pokolorawnie grafu
2. po każdym ruchu Bartka może powstać najwyżej jedno *poddrzewo niedozwolone*, które Ania może jednym ruchem naprawić *(zredukować do dozwolonego)*
3. z każdego typu dozwolonego możemy bezpośrednio redukować do typu dozwolonego

Definicje

- **Poddrzewo niezależne T** w lesie F jest to takie poddrzewo ze swoim *częściowym pokolorowaniem*, że każda pokolorowana krawędź w T prowadzi do liścia oraz T jest maksymalne. Wniosek: jeśli A jest liściem w T i krawędź do niego prowadząca jest niepokolorowana, to A jest też liściem w F.
- Wierzchołek leżący na wszystkich ścieżkach między dwoma różnie pokolorowanymi krawędziami nazywamy **wierzchołkiem gwiazdowym**.
- *Poddrzewo niezależne* nazywamy n-**gwiazdą** gdy ma n pokolorowanych krawędzi oraz, jeśli $n \geq 3$, zawiera *wierzchołek gwiazdowy*.
- Mówimy, że *n-gwiazda* jest **regularna** gdy $n \leq 2$ lub co najmniej jedna krawędź pokolorowana jest incydentna z *wierzchołkiem gwiazdowym*.

- Przez v_0-**gałąź B** rozumiemy poddrzewo T takie, że dokładnie jedna krawędź z B jest incydentna z v_0.
- Mówimy, że v_0-*gałąź B* jest pokolorowana, gdy zawiera co najmniej jedną pokoloraną gałąź, w przeciwnym wypadku jest niepokolorowana. Spostrzeżenie: n-gwiazda z wierzchołkiem gwiazdowym v_0 ma dokładnie n pokolorowanych i najwyżej $\Delta - n$ niepokolorowanych v_0-gałęzi.
- W n-gwieździe o $n \geq 3$ o pokolorowanej krawędzi powiemy, że jest **niedopasowana**, jeśli nie ma krawędzi incydentnej do jej wierzchołka gwiazdowego o tym samym kolorze.
- O *niedopasowanej* krawędzi powiemy, że jest **silnie niedopasowana**, jeśli dodatkowo jej odległość od wierzchołka gwiazdowego jest równa jeden. To znaczy, jeśli między nią a wierzchołkiem gwiazdowym jest jedna niepokolorowana krawędź.

Typy dozwolone

Pierwszym typem dozwolonym S_n są n-gwiazdy, które dodatkowo spełniają warunki:

1. są *regularne*
2. jeśli wierzchołek gwiazdowy jest stopnia Δ i $n \geq 4$, to zawierają co najwyżej $\max(0, \Delta - 1 - n)$ silnie niedopasowanych krawędzi

Zwróćmy uwagę na fakt, że już całkowicie niepokolorowane drzewo spełnia ten warunek. Jest ono 0-gwiazdą, a więc i poddrzewem typu dozwolonego S_0.

Typy dozwolone

Pierwszym typem dozwolonym S_n są n-gwiazdy, które dodatkowo spełniają warunki:

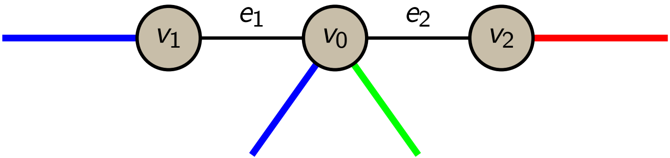
1. są *regularne*
2. jeśli wierzchołek gwiazdowy jest stopnia Δ i $n \geq 4$, to zawierają co najwyżej $\max(0, \Delta - 1 - n)$ silnie niedopasowanych krawędzi

Zwróćmy uwagę na fakt, że już całkowicie niepokolorowane drzewo spełnia ten warunek. Jest ono 0-gwiazdą, a więc i poddrzewem typu dozwolonego S_0.
Klasa ta nie jest wystarczająca. Ania nie może zapobiec stworzeniu 3-gwiazdy z dwoma silnie niedopasowanymi krawędziami. Musimy więc wprowadzić dodatkowy typ dozwolony (konketnie P_1 2) do którego będzimy redukować po takim ruchu Bartka. To zaś wymusza cały łańcuch dodatkowych typów.

Typ P_1

Wszystkie typy mogą mieć dodatkowe niepokolorowane v_i-gałęzie.

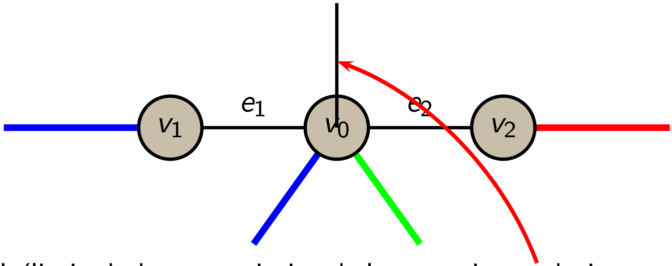
Do redukcji: 6



Typ P_1

Wszystkie typy mogą mieć dodatkowe niepokolorowane v_i-gałęzie.

Do redukcji: 6

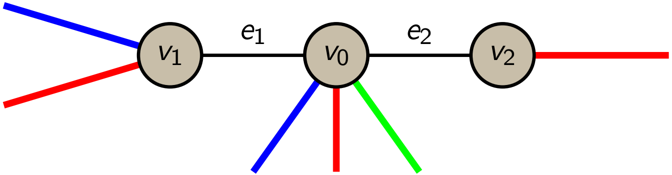


Jeśli nie dodamy tutaj niepokolorowanej v_0-gałęzi, to rysunek przedstawia przykład typu S_4. Po jej dodaniu okazuje się, że mamy 2 silnie niedopasowane krawędzie, a powinniśmy mieć $\Delta - 1 - n = 5 - 1 - 4 = 0$

Typ P_2

Wszystkie typy mogą mieć dodatkowe niepokolorowane v_i-gałęzie.

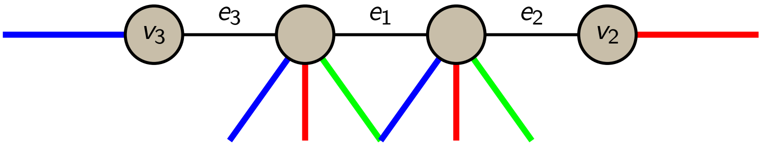
Do redukcji: 7



Typ P_3

Wszystkie typy mogą mieć dodatkowe niepokolorowane v_i-gałęzie.

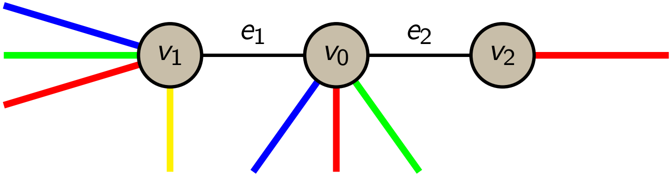
Do redukcji: 7



Typ P_4

Wszystkie typy mogą mieć dodatkowe niepokolorowane v_i-gałęzie.

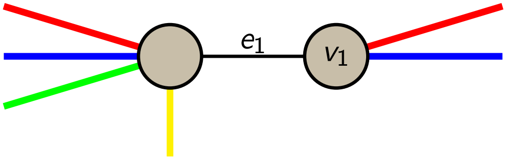
Do redukcji: 8



Typ P_A

Wszystkie typy mogą mieć dodatkowe niepokolorowane v_i-gałęzie.

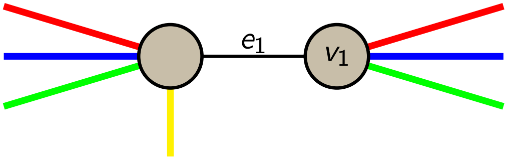
Do redukcji: 8



Typ P_B

Wszystkie typy mogą mieć dodatkowe niepokolorowane v_i-gałęzie.

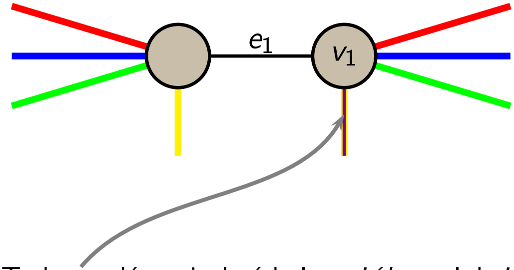
Do redukcji: 8



Typ P_C

Wszystkie typy mogą mieć dodatkowe niepokolorowane v_i-gałęzie.

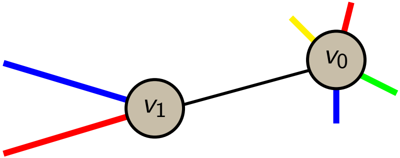
Do redukcji: 8



Ta krawędź może być koloru *żółtego* lub *innego*.

Uwagi ogólne do redukcji

- Interesują nas głównie przypadki, gdy Bartek wytworzył nam podgraf niedozwolony.
- W trakcie zabawy może powstać nam n-**kometa** z wierzchołkiem gwiazdowym v_0 i wierzchołkiem ogonowym v_1. Nie należy się jej bać, nie gryzie.



Rysunek przedstawia pewną 6-kometę. W dowolnym miejscu można dodać dowolną liczbę niepokolorowanych krawędzi i wierzchołków.

Redukcje z typów S_n

Jeśli w wyniku ruchu Bartka powstają dwa poddrzewa niezależne, to jedno z nich musi być typu S_1 albo S_2 – jest dozwolone. Oznaczmy nowo utworzone poddrzewo niedozwolone przez T'. Przypadek, gdy jest ono 3-gwiazdą jest trywialny (trzeba przywrócić regularność), więc załóżmy, że T' zawiera co najmniej 4 pokolorowane krawędzie. Oznaczmy, że v_0 to wierzchołek gwiazdowy T.

Bartek mógł pokolorować krawędź w pokolorowanej v_0-gałęzi, ale nie leżącą na ścieżce między wcześniej pokolorowaną krawędzią a v_0. W takim razie powstaje $n+1$-*kometa z wierzchołkiem ogonowym* v_1. W przeciwnym wypadku mamy do czynienia z n-gwiazdą bądź $n+1$-gwiazdą.

Przypadek 1: T' jest regularną k-gwiazdą, $\deg(v_0) = \Delta$.

Bartek mógł dodać jedną silnie niedopasowaną krawędź, więc możemy mieć o dwie takie krawędzie za dużo dla własności 2. W takim przypadku Ania koloruje krawędź między v_0 a jedną z nich na kolor drugiej z nich (jeśli była tylko jedna, to na dowolny legalny).

Wyjątkiem jest przypadek $\Delta = 5, k = 4$, gdy mogą być o 3 za dużo. Jeśli wszystkie 3 silnie niedopasowane krawędzie są różnych kolorów, to nie możemy zredukować do typu S_n. W takim razie usuwamy dowolne dwie z nich redukując do typu S_1.

Przypadek 2: T' jest $n+1$-kometą.

Oznaczmy prez e_0 pierwszą, a przez e_1 ostatnią krawędź na ścieżce między v_0 a v_1.
Jeśli $e_0 = e_1$, to wystarczy go legalnie pokolorować, by powstały dwa poddrzewa typów S_n.
Jeśli $e_0 \neq e_1$, to Ania powinna pokolorować e_0 o ile nie doprowadzi to do powstania nieregularnej 3-gwiazdy (o ile jakaś pokolorowana krawędź jest incydentna z v_1). Jeśli to się jej nie uda, powinna pokolorować e_1 kolorem krawędzi incydentnej z v_0. W obu przypadkach otrzymamy poddrzewa typów S_n.

Redukcje z typów $P_?$

W więszości typów $P_?$ występują dwie lub trzy nazwane krawędzie. Bartek może stworzyć poddrzewo niedozwolone wyłącznie kolorując jedną z nich. Ania podówczas naprawia sytuację kolorując inną nazwaną krawędź. Po takiej operacji powstają nam, z niepokolorowanych v_n-gałęzi (a więc pominiętych na rysunkach), poddrzewa typów S_n. Wobec tego dalej opisujemy wyłącznie przypadki, gdy Bartek pokolorował gałąź w niepokolorowanej v_n-gałęzi, od strony v_0 (bo z drugiej strony mamy nic lub S_1).

Typ P_1 , ilustracja: 2

- Jeśli Bartek pokolorował krawędź w niepokolorowanej v_2-gałęzi, to Ania koloruje krawędź e_2.
- Jeśli Bartek pokolorował krawędź w niepokolorowanej v_1-gałęzi (próbujemy po kolei):
  1. Ania koloruje e_1 na czerwono.
  2. Ania koloruje pierwszą krawędź niewidocznej na ilustracji v_0-gałęzi na czerwono $\longrightarrow P_2$
- Jeśli Bartek pokolorował krawędź e w niepokolorowanej v_0-gałęzi:
  1. Jeśli e jest incydentne z v_0, Ania koloruje e_2.
  2. Ania koloruje krawędź incydentną z v_0 ze ścieżki między e a v_0 na czerwono.
  3. Ania koloruje e_1 na czerwono.

Typ P_2 , ilustracja: 3

- Jeśli Bartek pokolorował krawędź w niepokolorowanej v_2-gałęzi, to ania koloruje $e_2 \longrightarrow P_A$
- Jeśli Bartek pokolorował krawędź e w niepokolorowanej v_1-gałęzi na kolor x:
  1. Jeśli $\deg(v_1) = 5$, e jest oddalone od v_1 o 1 i jest pokolorowane na zielono, to Ania koloruje na zielono pierwszą krawędź z pozostałej niepokolorowanej v_1-gałęzi $\longrightarrow P_3$
  2. Ania koloruje e_1 na x, jeśli się nie da to jakkolwiek.

Typ P_3 , ilustracja: 4

Jeśli Bartek pokolorował krawędź w niepokolorowanej v_2-gałęzi, to Ania powinna pokolorować e_2. Sytuacja jest symetryczna dla v_3-gałęzi $\longrightarrow P_4$

Typ P_4 , ilustracja: 5

Jeśli Bartek pokolorował krawędź w niepokolorowanej v_2-gałęzi, to Ania powinna pokolorować $e_2 \longrightarrow P_C$.

Typ P_A , ilustracja: 6
Typ P_B , ilustracja: 7
Typ P_C , ilustracja: 8
Postępowanie dla każdego z tych trzech typów jest identyczne:

- Jeśli Bartek pokolorował krawędź incydentną z v_1, to Ania koloruje e_1.
- Jeśli Bartek pokolorował krawędź e nie incydentną z v_1, to Ania koloruje krawędź incydentną z v_1 leżącą na drodze z e do v_1. Przejdziemy tak kolejno $P_A \longrightarrow P_B \longrightarrow P_C \longrightarrow S_3$

Plan prezentacji

Przypadki dla lasów o innych maksymalnych stopniach

1. Dla $\Delta \geq 6$ wystarczy opisana strategia bez typów $P_?$.
2. Dla $\Delta = 2$ dowód, że $\chi'_g(G) \leq 3$ jest trywialny.
3. Dla $\Delta = 3$ Andres udowodnił, że $\chi'_g(G) \leq 4$, używając jednak zupełnie innej strategii.
4. Dla $\Delta = 4$ problem wciąż jest otwarty

Brakuje więc tylko jednego przypadku, by stwierdzić, czy prawdziwym jest twierdzenie:
Dla każdego lasu G o maksymalnym stopniu wierzchołka Δ zachodzi

$$\chi'_g(G) \leq \Delta + 1$$

Definicje

- **Graf k-zdegenerowany** to taki graf, którego każdy podgraf indukowany ma wierzchołek o stopniu co najwyżej k.
  Powrót: 2.
- n-**kometa** jest to układ powstający z $n-1$-*gwiazdy* o *wierzchołku gwiazdowym* v_0 poprzez pokolorowanie krawędzi e w *pokolorowanej* v_0-*gałęzi* takiej, że przed pokolorowaniem nie leżała ona na ścieżce między pokolorowanymi krawędziami.

- Prezentacja oparta na pracy *The game chromatic index of forests of maximum degree* $\Delta \geq 5$, autor: Stephan Dominique Andres.
- Przypadek dla $\Delta = 3$ rozpatrzony przez tegoż samego autora w pracy *Spieltheoretische Kabtenfarbungsprobleme auf Waldern und verwandte Strukturen*.
- Twierdzenie o górnej granicy na $\chi'_g(G)$ dla grafów *k-zdegenerowanych* opisane jest w pracy *Game chromatic index of k-degenerate graphs*, autorzy: L.Cai i X.Zhu
- Twierdzenie o dolnej granicy na $\chi'_g(G)$ dla lasów opisane jest w *Note on the game chromatic index of trees*, autorzy: P.Erdos, U. Faigle, W.Hochstattler.

Opracował: Remigiusz 'IRem' Modrzejewski

Prezentacja przygotowana w ramach przedmiotu *Algorytmy grafowe* na Katedrze Algorytmów i Modelowania Systemów (http://kaims.pl). Strona przedmiotu: http://kaims.pl/~deren/ag/

Prezentacja dostępna pod adresem: http://Irem.net/pages/view/algorithms

Prezentacja, wraz z wszystkimi ilustracjami, wykonana w całości za pomocą systemu LaTeX.